Analyse Complexe
TD 1
Equations de Cauchy-Riemann, séries entières

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = x + iy^2$, pour $z = x + iy$. Existe-t-il un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ sur lequel la fonction f soit holomorphe ?
2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x + iy)$ soit un polynôme en x et y. Montrer que f est holomorphe si et seulement si c'est un polynôme.
3. Soit U un domaine de $\mathbb{C}$, $f \in H(U)$. On suppose qu'il existe a, b, c des réels non tous nuls tels que
$$a\mathrm{Re}(f) + b\mathrm{Im}(f) + c = 0.$$
Que peut-on dire de f ? Interprétation géométrique ?

Exercice 2 Soit U un domaine de $\mathbb{C}$.

1. Soit $f \in H(U)$. Montrer l'équivalence entre : f est constante ; $\mathrm{Re}(f)$ est constante ; $\mathrm{Im}(f)$ est constante ; $|f|$ est constante.
2. Soit $f \in H(U)$ telle que $\bar{f} \in H(U)$: que peut-on dire de f ?

Exercice 3

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$. Ecrire les conditions de Cauchy-Riemann pour f en coordonnées polaires.
2. En déduire l'existence d'une primitive holomorphe de $z \mapsto 1/z$ sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

Exercice 4

1. Soient z, w deux nombres complexes tels que $\bar{w}z \neq 1$. Prouver que si $|z|, |w| < 1$
$$|\frac{w - z}{1 - \bar{w}z}| < 1$$
et qu'on a égalité si z ou w est de module 1.
2. On fixe w avec $|w| < 1$. Montrer que la fonction
$$F_w : z \mapsto \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}$$
réalise une bijection holomorphe du disque unité ouvert sur lui-même échangeant 0 et w. Montrer que $|F(z)| = 1$ si et seulement si $|z| = 1$.

Exercice 5 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable.

On dit que f *conserve les angles "de manière infinitésimale"* si pour tout couple de chemins dérivables γ_1, γ_2 de $[0, 1]$ dans U tels que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ et dont les dérivées en 0 ne s'annulent pas, l'angle orienté $(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$ est égal à l'angle orienté $(\Gamma_1'(0), \Gamma_2'(0))$, avec $\Gamma_1 = f \circ \gamma_1$, $\Gamma_2 = f \circ \gamma_2$. Montrer que f préserve les angles "de manière infinitésimale" si et seulement si f est holomorphe et sa dérivée ne s'annule pas.

Quelles sont les fonctions qui préservent les angles non orientés ?

Exercice 6

1. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note $E(f)$ l'ensemble des points du cercle unité S où la série converge. Montrer que les cas suivants peuvent se produire : $E(f) = S$; $E(f) = \emptyset$; $E(f) = S \backslash \{z_0\}$, avec $z_0 \in S$.

   La question suivante traite un cas particulier favorable.

2. (*) On note $D = \{z, |z| < 1\}$. Soit $f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ continue et injective. On suppose f développable en série entière sur D :
$$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_n a_n z^n.$$
   Exprimer l'aire de $f(\bar{D})$ en fonction des a_n et en déduire que la série $\sum n|a_n|^2$ converge. Puis montrer que
$$\forall z \in \bar{D}, \quad f(z) = \sum_n a_n z^n.$$

3. On va fabriquer un exemple de série entière vérifiant $a_n \to 0$ et telle que $E(f) = \emptyset$ (dû à Luzin). Soit $m > 0$ un entier. On note
$$\Phi_m(z) = 1 + z + \ldots + z^{m-1}.$$
   Soit $z_0 \in S$. Montrer que
$$\max_{0 \le k \le m-1} |\Phi_m(z_0 e^{2i\pi k/m})| \ge \frac{2m}{\pi}.$$

4. On pose
$$H_m(z) = \Phi_m(z) + z^m \Phi_m(ze^{-2i\pi/m}) + \ldots + z^{(m-1)m}\Phi_m(ze^{-2i\pi(m-1)/m})$$
   et
$$f(z) = H_1(z) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} z^{1^2+2^2+\ldots+(m-1)^2} H_m(z).$$
   Montrer que $f(z)$ satisfait aux conditions cherchées.

   On commencera par estimer le module du n-ème coefficient du développement de f en série entière.

5. A l'aide de l'exemple de Luzin, fabriquer une série entière de rayon de convergence 1 telle que $E(f) = \{1\}$.

Exercice 7

1. Déterminer le rayon de convergence de la fonction de Bessel d'ordre r
$$J_r(z) = (\frac{z}{2})^r \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} (\frac{z}{2})^{2n},$$
   où $r \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série
$$\sum_n \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{3})}.$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série hypergéométrique :
$$\sum_{n \ge 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n$$
   où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $-\gamma \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$.

Exercice 8

(*) On considère la série entière $\sum a_n z^n$, avec, pour $n \ge 1$, $a_n = p_n/n$, p_n étant le nombre d'entiers $k \ge 1$ tels que $k!$ divise n. Déterminer le rayon de convergence de cette série, puis étudier la convergence de la série lorsque $x = e^{2i\pi r}$, $r \in \mathbb{Q}$, et lorsque $x = e^{2i\pi e}$.

Exercice 9

1. Soit $g(z) = \sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\mathrm{Re}(g(z)) > 0$ pour tout $|z| < 1$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $0 < r < 1$,

$$b_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(g(re^{i\theta}))e^{-in\theta} d\theta$$

et en déduire que

$$\forall n \geq 1, \quad |b_n| \leq 2\mathrm{Re}(b_0).$$

2. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 vérifiant

$$\forall |z| < 1, \quad |f(z)| < 1.$$

Montrer que

$$\forall |z| < 1/3, \quad \sum_n |a_n z^n| < 1.$$

Montrer que la constante $1/3$ est optimale (on pourra considérer les fonctions introduites dans l'exercice 4).